Nursubyakto, (2009), TRANSMISI, Vol-V Edisi-1/ Hal. 449 - 456

PENENTUAN PROFIL KECEPATAN PADA LAPISAN BATAS PLAT DATAR MODEL POLINOMIAL

Nursubyakto*

Abstraksi

Paper ini menyajikan perhitungan pendekatan distribusi (profil) kecepatan lapisan batas pada plat datar dengan kondisi laminer di mana cara menentukan profil kecepatannya ditentukan kemudian penyelesaiannya disamakan dengan hasil numerik dengan massa atur. Penyelesaian pendekatan profil kecepatan menggunakan cara integrasi metode volume atur dengan model persamaan polinomial. Model persamaan polinomial adalah $u = a + by + cy^m$ di mana m adalah satu-satunya koefisien pangkat polinomial yang juga penentu koefisien-koefisien a, b, dan c. Profil kecepatan yang diperoleh adalah $\frac{u}{U} = 1{,}703h + 0{,}703h^{2,4223}$. Profil ini adalah hasil penyamaan cara integrasi yang diperoleh pada pendekatan secara numerik cara deferensisasi. Hasil penentuan profil kecepatan yang didapatkan kemudian digunakan untuk menentukan nilai tegangan geser dan menyamakan dengan hasil pendekatan numerik diferensiasi.

Kata Kunci : Tebal Lapisan Batas, Laminer, Plat Datar

PENDAHULUAN

Lapisan batas adalah suatu teori yang menggabungkan antara teori mekanika fluida kuno dengan teori mekanika fluida modern. Teori ini pertama kali diperkenalkan oleh Prandtl tahun 1904. Teori ini menjelaskan bahwa aliran fluida yang melewati suatu permukaan akan membentuk suatu lapisan tipis antara permukaan dengan aliran arus bebas fluida. Besarnya atau tebal lapisan batas ditentukan sebesar 99 % antara kecepatan di dalam lapisan batas dengan kecepatan arus bebas. Buku-buku teks telah banyak membahas teori lapisan batas serta menentukan ketebalannya secara analitik baik dengan cara menebak maupun menyelesaikannya secara numerik.

Dalam menentukan tebal lapisan batas ada berbagai cara yaitu meramalkan profil kecepatan lapisan batas dan menyelesaikan persamaan secara numerik. Cara lain yang digunakan adalah meramalkan profil kecepatan lapisan batas yang dipakai adalah cara penyelesaian integral (volume atur) di mana profil kecepatan ditebak terlebih dahulu kemudian mengintegralkan persamaan tegangan geser secara keseluruhan pada plat datar. Cara lain adalah dengan menggunakan metoda numerik yang telah diselesaikan oleh Blasius (massa atur). Kedua metode tersebut dapat ditemui pada buku-buku teks seperti yang ditulis oleh Streeter (1993) dan Fox (1994). Namun perkembangan komputer yang begitu pesat penyelesaian numerik lebih dominan dan tak terhitung jumlahnya daripada penyelesaian matematik karena penyelesaian eksak sulit ditentukan. Tulisan berikut ini merupakan penyelesaian klasik untuk mendekati kembali penyelesaian eksak dengan bantuan penyelesaian numerik yang telah ada. Pertama kali profil kecepatan ditebak terlebih dahulu, dengan metode volume atur, karena dengan diketahui profil kecepatan maka tegangan geser pada dinding plat dapat dihitung. Nilai perhitungan dari tegangan

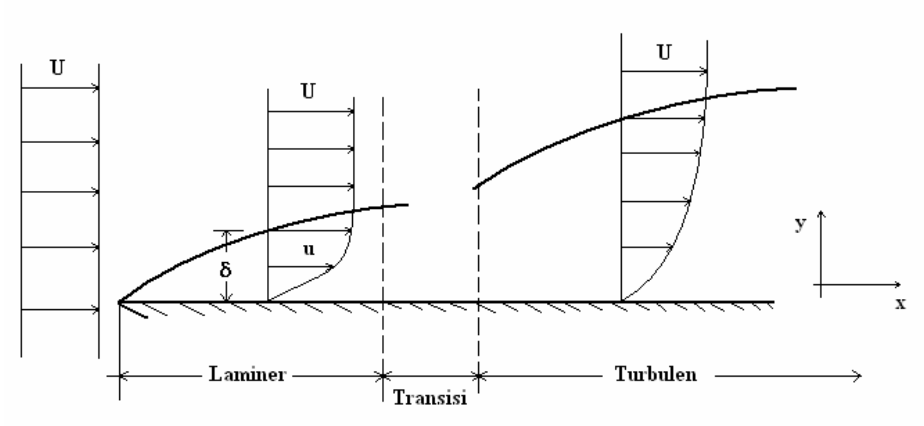
* Dosen Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Merdeka Malang

geser kemudian digunakan untuk menentukan tebal lapisan batas. Selanjutnya dengan ketebalan lapisan batas, dengan metode massa atur, menyamakan nilainya dari hasil numerik.

KAJIAN PUSTAKA

Persamaan dasar yang digunakan untuk menentukan persamaan lapisan batas, lihat Gambar 1, adalah persamaan Navier-Stokes (Fox, 1994) yang telah disederhanakan sesuai dengan kondisi lapiran batas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$



Gambar 1. Lapisan Batas Pada Pelat Datar (Fox, 1994)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

Kondisi batas yang dikenakan pada kedua persamaan di atas adalah,

$$\text{Pada} \quad \left.\begin{array}{ll} y = 0, & u = 0 \\ y = \infty, & u = U \end{array}\right\} \tag{3}$$

Dalam kondisi batas tersebut u merupakan profil kecepatan di dalam lapisan batas sedang U adalah kecepatan seragam yang melewati plat datar. Profil kecepatan, u/U, seharusnya sama untuk semua nilai sepanjang koordinat x bila diplot dalam bentuk tanpa-dimensi jarak dari dinding dan δ yang menggambarkan tebal lapisan batas seharusnya juga dapat ditulis dalam bentuk tanpa-dimensi. Maka bentuk tanpa-dimensi yang digunakan untuk menyelesaikan profil kecepatan adalah,

$$\frac{u}{U} = g(\eta) \quad \text{di mana} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Tebal lapisan batas $\delta \approx \sqrt{\nu x / U}$, $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$, $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, dan $f(\eta) = \psi/\sqrt{\nu x U}$ dengan ψ adalah fungsi arus. Setelah menggunakan beberapa penyederhanaan maka

$$2\frac{d^2 f}{d\eta^3} + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \tag{4}$$

Dengan kondisi-kondisi batas:

$$\text{Pada } \eta = 0, \quad f\frac{df}{d\eta} = 0 \tag{5}$$

$$\text{Pada } \eta = \infty, \quad \frac{df}{d\eta} = 1 \tag{6}$$

Kemudian Blasius menyelesaiaan persamaan-persamaan ini menggunakan teori deret. Saat ini penyelesaian persamaan ini menggunakan metode numerik. Hasil yang paling penting dari penyelesaian ini adalah tebal lapisan batas, δ, sebagai nilai dari y di mana u/U=0,99 maka

$$\delta \approx \frac{5{,}0}{\sqrt{\dfrac{U}{\nu x}}} = \frac{5{,}0\,x}{\sqrt{Re_x}} \tag{7}$$

Dalam tulisan ini cara coba-tebak akan dihindari tetapi mengadopsi nilai eksak yang sudah ada yaitu penyelesain pendekatan numerik. Begitu juga profil ini diterapkan pada plat datar di mana penyelesaiannya lebih sederhana. Aliran yang melewati plat datar diasumsikan laminer dan distribusi tekanan yang melewati plat datar dianggap konstan.

Persamaan integral momentum merupakan penyelesaian pendekatan karena penyelesaian eksak tebal lapisan batas yang diperoleh pada persamaan (7) merupakan hasil penyelesaian eksak yang diselesaikan secara numerik. Integral momentum mendekati penyelesaian dengan menggunakan volume atur (bentuk integral) sedang hasil persamaan (7) adalah penyelesaian dengan menggunakan massa atur (bentuk deferensial). U, ρ, dan dp/dx diasumsikan konstan. Kemudian persamaan momentum tebal lapisan batas, Gambar 1 dengan θ sebagai tebal momentum, adalah

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \approx \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \tag{8}$$

dan tegangan geser di dinding, τ_w,

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \tag{9}$$

Jika $\eta = \dfrac{y}{\delta}$ maka $dy = \delta d\eta$, sehingga

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \qquad (10)$$

Asumsi lain yang harus ditentukan ialah aliran stedi, aliran tak-mampumampat, aliran dua dimensi, dan tanpa ada gaya bodi. Untuk menerapkan persamaan (10) guna menentukan tebal lapisan batas sebagai fungsi dari x maka harus,

1. menentukan pendekatan pada gradien tekanan dp/dx yang berhubungan dengan tegangan geser τ_w sampai dengan medan kecepatan.
2. asumsikan bentuk profil kecepatan yang ada di dalam tebal lapisan batas dan pada paper ini dipilih bentuk persamaan polinomial. Asumsi ini ditentukan sekali pada tulisan ini.
3. hubungkan tegangan geser dengan profil kecepatan.

METODOLOGI

Distribusi kecepatan pada plat datar dalam lapisan batas ditebak mempunyai bentuk polinomial. Umumnya bentuk distribusi adalah polinomial, sinus atau bentuk lainnya. Profil kecepatan lapisan batas pada plat bentuk polinomial yang akan ditentukan adalah sebagai berikut,

$$u = a + by + cy^m \qquad (11)$$

di mana a, b, c, dan m adalah konstanta.

$$\frac{u}{U} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^m \qquad (12)$$

bila u/U = η maka bentuk umum profil atau distribusi kecepatan (11) dan (12) dapat ditulis,

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^m \qquad (13)$$

Dari bentuk persamaan (13) ini maka a, b, c, dan pangkat m yang perlu dicari. Dengan demikian maka perlu syarat batas:

$$\text{pada } \eta = 0 \text{ maka } \frac{u}{U} = 0 \qquad (14)$$

$$\text{pada } \eta = 1 \text{ maka } \frac{u}{U} = 1 \qquad (15)$$

$$\text{pada } \eta = 1 \text{ maka } \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right) = 0 \qquad (16)$$

kemudian masukkan syarat batas (14) sampai (16) ke dalam (13) sehingga menjadi bentuk umum seperti berikut,

$$\frac{u}{U}=\left(\frac{m}{m-1}\right)\eta-\left(\frac{1}{m-1}\right)\eta^{m} \tag{17}$$

Persamaan (7) menunjukkan bahwa model persamaan polinomial sekarang hanya tergantung pada konstanta m saja. Bila m dapat ditentukan maka profil kecepatan dapat ditentukan pula. Demikian pula tegangan geser akan dapat dihitung.

Tegangan geser permukaan pada plat datar dengan distribusi tekanan konstan dalam arah horisontal Fox (1994) adalah,

$$\tau_{w}=\frac{\mu U}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right)_{\eta=0}=\frac{\mu U}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{m}{m-1}\right)\eta-\left(\frac{1}{m-1}\right)\eta^{m}\right]_{\eta=0}$$

$$\tau_{w}=\frac{\mu U}{\delta}\left[\left(\frac{m}{m-1}\right)-\frac{1}{(m-1)^{2}}\eta^{m-1}\right]_{\eta=0}$$

$$\tau_{w}=\frac{\mu U}{\delta}\left(\frac{m}{m-1}\right) \tag{18}$$

Persamaan (18) menunjukkan bahwa tegangan geser juga telah tergantung hanya pada konstanta m saja. Distribusi tegangan geser berdasarkan persamaan momentum, dengan memasukkan persmaaan (10) maka

$$\tau_{w}=\rho U^{2}\frac{d\delta}{dx}\int_{0}^{1}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta$$

$$\tau_{w}=\rho U^{2}\frac{d\delta}{dx}\int_{0}^{1}\left[\left\{\left(\frac{m}{m-1}\right)\eta-\left(\frac{1}{m-1}\right)\eta^{m}\right\}\left\{1-\left(\frac{m}{m-1}\right)\eta-\left(\frac{1}{m-1}\right)\eta^{m}\right\}\right]d\eta$$

hasil pengintegralan ini adalah,

$$\tau_{w}=\rho U^{2}\frac{d\delta}{dx}\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2(m-1)}-\frac{m^{2}}{3(m-1)^{2}}+\frac{2m}{(m+2)(m-1)}-\frac{1}{(m+1)(m-1)}\\-\frac{1}{(2m+1)(m-1)^{2}}\end{array}\right] \tag{19}$$

kemudian samakan persamaan (18) dengan persamaan (19) maka akan diperoleh,

$$\left(\frac{m}{m-1}\right)\frac{\mu U}{\delta}=\rho U^{2}\frac{d\delta}{dx}\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2(m-1)}-\frac{m^{2}}{3(m-1)^{2}}+\frac{2m}{(m+2)(m-1)}\\-\frac{1}{(m+1)(m-1)}-\frac{1}{(2m+1)(m-1)^{2}}\end{array}\right]$$

atau,

$$\delta\, d\delta = \frac{\mu\, dx}{\rho U}\left(\frac{m}{m-1}\right)\left[\frac{6(m-1)^2(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^5+m^4-3m^3-7m^2+6m}\right]$$

$$\delta\, d\delta = \frac{\mu\, dx}{\rho U}\left[\frac{6(m-1)(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^4+m^3-2m^3-7m+6}\right]$$

$$\delta\, d\delta = \frac{\mu\, dx}{\rho U}\left[\frac{6(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]$$

Pengintegralan persamaan di atas menghasilkan,

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\mu\, x}{\rho U}\left[\frac{6(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right] + C$$

di mana C adalah konstanta sebarang. Dengan memasukkan syarat batas pada x=0 maka δ=0 sehingga C=0. Kemudian diperoleh,

$$\delta^2 = \frac{\mu\, x}{\rho U}\left[\frac{12(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]$$

Jadi, $\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = \left[\frac{12(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]\mathrm{Re}_x^{-1}$

$\mathrm{Re} = \frac{\rho U x}{\mu}$ di mana Re merupakan bilangan Reynolds. Penyederhanaan lebih lanjut memberikan,

$$\frac{\delta}{x} = \left[\frac{12(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}} = \left[\frac{12(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

Hasil akhir penyederhaan persamaan diperlihatkan pada persamaan (20). Dengan persamaan (20) ini kemudian digunakan untuk menentukan besaran konstanta m. Berdasarkan penyelesaian Blassius, penyelesaian bentuk persamaan differensial yang diperoleh secara numerik untuk nilai dari $\frac{\delta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}}$ adalah sebesar 5, lihat persamaan (7). Kemudian samakan persamaan (20) dengan nilai persamaan (7). Dari sini, maka

$$\left[\frac{12(m+2)(m+1)(2m+1)}{2m^3+3m^2+m-6}\right]^{\frac{1}{2}} = 5 \tag{21}$$

Dengan persamaan ini, bila diselesaikan untuk mendapatkan nilai m, akan diperoleh satu penyelesaian akar persamaan riil yaitu m = 2,422827114. Nilai m yang lain merupakan penyelesaian akar persamaan dalam bentuk bilangan khayal (*imaginair*) dan dianggap bukan penyelesaian dari distribusi kecepatan.

Perolehan nilai m di atas akan menentukan bentuk umum distribusi kecepatan. Masukkan nilai m ini ke dalam persamaan (17) maka akan didapatkan persamaan polinomial profil kecepatan $\frac{u}{U} = 1{,}703h + 0{,}703h^{2{,}4223}$. Seperti telah disinggung di depan bahwa sekali diperoleh distribusi kecepatan maka parameter lain dapat ditentukan berdasarkan profil ini. Dari hasil penyelesaian profil polinomial maka koefisien tegangan geser dapat diperoleh sebesar,

$$C_f = 0{,}681131 \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \qquad (22)$$

Tegangan geser hasil pendekatan numerik dengan metode massa atur adalah sebesar C_f = 0,664 $\mathrm{Re}_x^{-1/2}$. Hasil kedua perhitungan dengan menggunakan metode yang berbeda juga memberikan hasil yang berbeda namun perbedaan ini sangat kecil dan dapat diabaikan.

PEMBAHASAN

Banyak kasus penyelesaian tebal lapisan batas menggunakan penyelesaian numerik sebagai penyelesaian eksak. Penyelesaian numerik adalah bentuk penyelesaian pendekatan karena bentuk penyelesaian eksak belum diperoleh. Namun, penyelesaian numerik saat ini telah dianggap sebagai penyelesaian eksak karena penyelesaian eksak sendiri belum diperoleh. Penyelesaian demikian ditunjang oleh program komputer yang semakin murah dan canggih. Sejak saat itu maka penyelesaian numerik menjadi penyelesaian yang menjadi tinjauan utama dan intensif. Dua pendekatan untuk dapat menyelesaian secara numerik yaitu menggunakan pendekatan volume atur dan massa atur. Hasil pembuktian di sini adalah penyelesaian dengan volume atur dengan profil kecepatan di dalam lapisan batas yang ditentukan yang didasarkan dari hasil perhitungan yang diperoleh dari massa atur meskipun penggunaan secara bersama untuk memecahkan persamaan tebal lapisan batas adalah tidak mungkin.

Hasil penyelesaian tebal lapisan antara menggunakan metode volume atur dengan profil yang ditentukan berbentuk polinomial dengan massa atur adalah sama besar karena memang dipaksa untuk disamakan. Namun, nilai koefesien geser sangat berbeda sebesar 2,6% dan perbedaan ini sangat kecil dan bisa diabaikan. Dengan cara demikian maka metode pendekatan cara integral dapat digunakan untuk menebak tebal lapisan batas. Perluasan lebih lanjut adalah penerapannya pada aliran turbulen.

SIMPULAN

Ini adalah salah satu penyelesaian untuk menghindari coba-tebak (*trial and error*) distribusi kecepatan pada lapisan batas tidak dipakai tetapi menggunakan penyelesaian pendekatan langsung bentuk persamaan polinomial. Hasil ini lebih berguna bila rumusan empiris sederhana ingin diprediksi. Kelebihan lain dari persamaan ini adalah hanya satu koefisien pangkat yang perlu dicari yaitu m. Dengan bentuk $\frac{u}{U} = \left(\frac{m}{m-1}\right)\eta - \left(\frac{1}{m-1}\right)\eta^{m}$ hasil penyelesaian numerik memberikan nilai m = 2,422827114. Hasil pembuktian ini juga diharapkan dapat memberikan sumbangan pemikiran yang selama ini belum ditulis dalam buku-buku teks.

DAFTAR PUSTAKA

Streeter V. L. and E. B. Wylie, 1993, ***Fluid Mechanics***, Erlangga, Edisi ke delapan, Jilid 1.

Fox R. W. and A. T. McDonald, 1994, ***Introduction to Fluid Mechanics***, John Wiley & Sons, Inc. , Fifth Edition.